# Die Schraubenfläche

mit

# GENEIGTER ERZEUGUNGSLINIE

und die

## Bedingungen des Gleichgewichts für solche Schrauben.

---

# INAUGURAL-DISSERTATION

welche

mit Genehmigung der philosophischen Facultät zu Marburg

**zur Erlangung der Doctorwürde**

einreicht


**JOHANN TYNDALL.**



**Marburg.**

Elwert'sche Universitäts-Buchdruckerei.

1850.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0033

## §. 1.

Die Schraubenfläche, von welcher in den Lehrbüchern der Mechanik gewöhnlich gesprochen wird, ist die Fläche, welche von einer geraden Linie beschrieben wird, die sich längs der Axe eines geraden Cylinders, und einer auf der Cylinderfläche befindlichen Schraubenlinie, jedoch immer in senkrechter Lage gegen die Axe hinaufbewegt. Der Gang der Schraube, welche bei physikalischen und mathematischen Untersuchungen betrachtet wird, ist durch einen Theil der erwähnten Schraubenfläche gebildet; allein eine Schraube von dieser Art kommt in der Praxis nur ausnahmsweise vor, indem die den Schraubengang bildende Fläche gewöhnlich durch eine Linie erzeugt wird, welche mit der Cylinderaxe einen schiefen Winkel bildet. Es schien mir daher die Untersuchung dieser letzteren allgemeineren Art von Schraubenflächen von Intresse zu sein; also namentlich die Entwickelung der Gleichung einer Fläche, welche entsteht, wenn eine Erzeugungslinie, unter irgend einem Winkel, zur Axe eines Cylinders geneigt, sich längs einer Schraubenlinie aufwärts bewegt; und endlich die Feststellung der Gleichgewichtsbedingungen bei einer Schraube, deren Gang durch einen Theil einer solchen Fläche gebildet wird.

## §. 2.

Denken wir uns den Cylinder durch eine auf seiner Axe senkrechte Ebene durchgeschnitten, und wählen den Mittelpunkt des so erzeugten Kreises als Ursprung der Coordinaten. Auf diese Weise wird die Aufgabe auf die Bestimmung einer windschiefen Fläche zurückgeführt, deren Leitlinie die Axe OL und die Schraubenlinie STU sind, und deren Erzeugungslinie die Linie MP in irgend einer Lage vorstellen mag.

Nimmt man z als independente Variable an, so werden die Gleichungen der Erzeugungslinie MP sein:

$$x = \mathfrak{A}z + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

$$y = \mathfrak{B}z + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

Worin durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Tangente der Winkel vorgestellt werden, welche die Projectionen von MP auf die Ebene der (x, z) und (y, z) mit der z Axe einschliessen.

Es besteht zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine Relation, mittelst welcher, wenn eine von diesen beiden Grössen angenommen oder gegeben wird, die andere gefunden werden kann. Diese Relation ist auf Folgendes begründet:

$$\cos OMP = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + 1}}$$

$$\sec OMP = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + 1}$$

Durch Quadriren und eine leichte Umformung der Gleichung erhalten wir

$$\text{tang } OMP^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$$

Setzt man nun tang OMP $= \mathfrak{C}$, so wird:

$$\mathfrak{C} = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.)$$

Die Gleichungen der Leitlinie OL sind:

$$x = 0$$
$$y = 0$$

und jene der Leitlinie STU:

$$x = a \sin \frac{2\pi z}{h}$$

$$y = a \cos \frac{2\pi z}{h}$$

worin a den Radius des Kreises SVN, und h die Höhe eines Schraubengangs vorstellt.

Die Coordinaten der Punkte M und T seien:

$$M \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases} \qquad T \begin{cases} x, \\ y, \\ z, \end{cases}$$

Die Forderung, dass die Leitlinie durch diese Punkte gehen soll, verlangt, dass den folgenden Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$0 = \mathfrak{A}k + \alpha$$
$$0 = \mathfrak{B}k + \beta$$

$$x, = a \sin \frac{2\pi z,}{h}$$

$$y, = a \cos \frac{2\pi z,}{h}$$

$$x, = \mathfrak{A}z, + \alpha$$
$$y, = \mathfrak{B}z, + \beta$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt durch Substitution des für $k = -\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}$ aus der ersten Gleichung erhaltenen Werths in die zweite

$$\beta = \mathfrak{B}\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.)$$

Durch Substitution der Werthe von x und y aus den letzten Gleichungen erhalten wir

$$\mathfrak{A}z, + \alpha = a \sin \frac{2\pi z,}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.)$$

$$\mathfrak{B}z, + \beta = a \cos \frac{2\pi z,}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.)$$

Um $z_1$ aus diesen beiden Gleichungen zu eliminiren, quadriren wir dieselben und addiren, so ergiebt sich:

$$(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\, z_1^2 + 2\,(\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta)\, z_1 = a^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

$$\text{oder: } z_1^2 + \frac{2(\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta)}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}\, z_1 + \left(\frac{\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}\right)^2 = \frac{a^2 - \alpha^2 - \beta^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} + \left(\frac{\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}\right)^2$$

$$\text{also: } z_1 = -\frac{\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2 - \beta^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} + \left(\frac{\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}\right)^2}$$

Durch Substitution des in (4.) für $\beta$ gefundenen Werths erhält man:

$$z_1 = -\frac{\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}^2\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2 - \beta^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} + \left(\frac{\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}^2\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}\right)^2}$$

$$z_1 = -\frac{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\,\alpha}{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\,\mathfrak{A}} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{A}^2 a^2 - \mathfrak{A}^2\alpha^2 - \mathfrak{B}^2\alpha^2}{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\,\mathfrak{A}^2} + \left[\frac{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\,\alpha}{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\,\mathfrak{A}}\right]^2}$$

Es ist aber $\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$, daher wird:

$$z_1 = -\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{A}^2 a^2 - \mathfrak{C}^2\alpha^2}{\mathfrak{C}^2\mathfrak{A}^2} + \frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}^2}}$$

$$= -\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{A}^4 a^2 - \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}^2\alpha^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}^2\alpha^2}{\mathfrak{A}^4\mathfrak{C}^2}}$$

$$= -\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{\mathfrak{C}^2}}$$

$$\text{oder endlich } z_1 = -\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} \pm \frac{a}{\mathfrak{C}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.)$$

In dieser Gleichung hat $z_1$ zwei Werthe. Um dies zu erklären, müssen wir bedenken, dass die Erzeugungslinie eine verschiedene Lage annimmt, je nachdem $\mathfrak{C}$ positiv oder negativ angenommen wird. In dem ersten Falle würde ihre Lage die in Fig. 2 durch M′P′ bezeichnete Linie sein, welche durch ihre Bewegung die untere Fläche der dreieckigen Schrauben erzeugt. In dem letzten Falle stellt MP ihre Lage dar. Da diese Lage diejenige ist, von welcher wir ausgegangen sind, so geht die obige Gleichung über in

$$z_1 = -\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} - \frac{a}{\mathfrak{C}}$$

$$\text{oder: } z_1 = k - \frac{a}{\mathfrak{C}}$$

wovon man sich leicht auf geometrische Wege überzeugen kann.

Man ziehe TW parallel mit OV, so dass die Axe OL in W getroffen wird. Dann wird

$$MW = WT.\ \text{tang}\ MTW$$
$$= WT.\ \text{cotang}\ TMW$$
$$= \frac{a}{\mathfrak{C}}$$

$$\text{und: } z_1 = OM - MW$$

$$\text{oder: } z_1 = k - \frac{a}{\mathfrak{C}}$$

Durch Substitution dieses Werths von z, in die Gleichungen (5.) und (6.) erhalten wir

$$-\mathfrak{A}\left[\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{a}{\mathfrak{C}}\right]+\alpha = a \sin \frac{-2\pi\left[\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{a}{\mathfrak{C}}\right]}{h}$$

$$-\mathfrak{B}\left[\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{a}{\mathfrak{C}}\right]+\beta = a \cos \frac{-2\pi\left[\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{a}{\mathfrak{C}}\right]}{h}$$

Durch Auflösung der Paranthese ergiebt sich

$$-\mathfrak{A}\frac{a}{\mathfrak{C}} = a \sin \frac{-2\pi\left[\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{a}{\mathfrak{C}}\right]}{h}$$

$$-\mathfrak{B}\frac{a}{\mathfrak{C}} = a \cos \frac{-2\pi\left[\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{a}{\mathfrak{C}}\right]}{h}$$

und wenn wir die obige Gleichung durch die untere dividiren, so wird

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \text{tang} \frac{-2\pi\left[\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{a}{\mathfrak{C}}\right]}{h}$$

$$\text{oder} -\left[\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{a}{\mathfrak{C}}\right] = \frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

$$\text{oder} -\left[\frac{\alpha\mathfrak{C}+\mathfrak{A}a}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\right] = \frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \quad \ldots\ldots\ldots (8.)$$

Durch die eben angeführte Elimination der Coordinaten x, y, z, und der Grösse $\beta$ haben wir eine Gleichung erhalten, in welcher nur die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\alpha$ vorkommen; $\mathfrak{C}$ ist gegeben und $\mathfrak{B}$ kann durch $\mathfrak{A}$ ausgedrückt werden. Die Gleichung enthält daher eigentlich nur zwei unbekannte Grössen $\mathfrak{A}$ und $\alpha$.

Um $\mathfrak{A}$ und $\alpha$ zu eliminiren wollen wir die Gleichungen (1.) und (2.) in Anwendung bringen:

$$x = \mathfrak{A}z + \alpha$$
$$y = \mathfrak{B}z + \beta$$

und die Gleichung (8.)

$$-\frac{\mathfrak{C}\alpha+\mathfrak{A}a}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = \frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

Die Gleichung (1.) liefert . . $\alpha = x - \mathfrak{A}z$

Die Gleichung (4.) „ . . $\beta = \mathfrak{B}\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}$

und endlich die Gleichung (3.) „ . . $\mathfrak{B} = \sqrt{\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{A}^2}$

Woraus unmittelbar folgt:

$$y = \frac{\sqrt{\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{A}^2}}{\mathfrak{A}} . x$$

oder: $\mathfrak{A}^2 y^2 = (\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{A}^2) x^2$

oder: $(x^2 + y^2)\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{C}^2 x^2$

oder: $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{C}x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Wird diese Gleichung in Form einer Proportion ausgedrückt, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{G} = x : \sqrt{x^2 + y^2}$$

wie aus der Figur erhellet, wenn man berücksichtigt, dass $\mathfrak{A}$ die Tangente des Winkels vorstellt, welchen die Projection MR der Erzeugungslinie mit der z Axe bildet, und dass $\mathfrak{G}$ die Tangente des Winkels OMP ist: es verhält sich nämlich

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{G} = OR : OP = x : \sqrt{x^2 + y^2}$$

Es war nun

$$\alpha = x - \mathfrak{A} z$$

woraus man, wenn in diese Gleichung der für $\mathfrak{A}$ ermittelte Werth substituirt wird, erhält:

$$\alpha = x - \frac{\mathfrak{G} x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Werden jetzt die für $\alpha$ und $\mathfrak{A}$ erhaltenen Werthe in die Gleichung (8.) substituirt, so ergiebt sich:

$$\frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{\frac{\mathfrak{G} x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{\mathfrak{G}^2 - \frac{\mathfrak{G}^2 x^2}{x^2 + y^2}}} = - \frac{\mathfrak{G}\left(x - \frac{\mathfrak{G} x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot z\right) + \frac{\mathfrak{G} x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot a}{\frac{\mathfrak{G}^2 x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

oder: $$\frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{x}{y} = - \frac{\mathfrak{G} x \sqrt{x^2 + y^2} - \mathfrak{G}^2 xz + \mathfrak{G} xa}{\frac{\mathfrak{G}^2 x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

oder: $$\frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{x}{y} = - \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \mathfrak{G} z + a}{\mathfrak{G}}$$

oder endlich: $$z = \frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{x}{y} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + a}{\mathfrak{G}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9.)$$

welches die Gleichung der in Untersuchung stehende Fläche ist.

Wird $\mathfrak{G}$ unendlich, welcher Fall eintritt, wenn die Erzeugungslinie auf der z Axe senkrecht steht, so haben wir

$$z = \frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{x}{y}$$

welches bekanntlich die Gleichung der gemeinen Schraubenfläche ist.

## §. 3.

Um die Bedingungen des Gleichgewichts für diese Fläche zu finden, denken wir uns einen frei beweglichen Körper an irgend einem Punkte M derselben, und fragen, in welcher Richtung er sich von M aus bewegen würde, um in die Horizontalebene, oder in die Ebene der (x, y) zu gelangen. Offenbar fällt diese Richtung mit dem Elemente der Linie des stärksten Falls zusammen.

Die Tangente des Winkels, unter welchen das Element einer in einer krummen Fläche liegende Curve gegen den Horizont geneigt ist, wird bekanntlich durch $\frac{p + q\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ angegeben, wobei $\varepsilon = \frac{dy}{dx}$ und p und q die aus der gegebenen Gleichung der Fläche zu berechnenden partiellen Differential-Quotienten von z, nach x und y vorstellen.

Für eine Linie des stärksten Falls wird diese Tangete ein Maximum sein müssen, und es kommt darauf an, zu erfahren, für welchen Werth von $\varepsilon$, $\frac{p + q\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ ein Maximum wird. Differentirt man daher diesen Ausdruck nach $\varepsilon$, setzt den ersten Differential-Quotient $= 0$, so wird sich ergeben $\varepsilon = \frac{q}{p}$.

## §. 4.

Da im vorliegenden Falle als Gleichung der Fläche in §. 3 gefunden wurde:

$$z = \frac{h}{2\pi} \text{ arc tang } \frac{x}{y} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + a}{\mathfrak{S}}; \text{ so hat man}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{\mathfrak{S}\sqrt{x^2 + y^2}} = p$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{\mathfrak{S}\sqrt{x^2 + y^2}} = q$$

Um $\varepsilon$ zu finden, muss man, weil $\varepsilon = \frac{q}{p}$ ist, die zweite Gleichung durch die erste dividiren, dadurch wird:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{\mathfrak{S}\sqrt{x^2 + y^2}}}{\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{\mathfrak{S}\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$= -\frac{\mathfrak{S}hx\sqrt{x^2 + y^2} - 2\pi y(x^2 + y^2)}{\mathfrak{S}hy\sqrt{x^2 + y^2} + 2\pi x(x^2 + y^2)}$$

$$\text{oder: } \frac{dy}{dx} = -\frac{\mathfrak{S}hx - 2\pi y\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathfrak{S}hy + 2\pi x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Wenn wir diesen Werth von $\varepsilon$ und die Werthe von p und q in die Formel $\frac{p + q\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ substituiren, und den Winkel, welchen die Tangente der Linie des stärksten Falls im Punkte M mit dem Horizont einschliesst, $\psi$ nennen, so erhalten wir:

$$\text{tang } \psi = \frac{\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{\mathfrak{G}\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{\mathfrak{G}\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{\mathfrak{G}hx - 2\pi y\sqrt{x^2+y^2}}{\mathfrak{G}hy + 2\pi x\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathfrak{G}hx - 2\pi y\sqrt{x^2+y^2}}{\mathfrak{G}hy + 2\pi x\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{\mathfrak{G}hy + 2\pi x\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi\mathfrak{G}(x^2+y^2)} + \frac{\mathfrak{G}hx - 2\pi y\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi\mathfrak{G}(x^2+y^2)}\cdot\frac{\mathfrak{G}hx - 2\pi y\sqrt{x^2+y^2}}{\mathfrak{G}hy + 2\pi x\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathfrak{G}hx - 2\pi y\sqrt{x^2+y^2}}{\mathfrak{G}hy + 2\pi x\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}$$

Dividirt man durch $2\pi\mathfrak{G}(x^2+y^2)$ und bringt den Ausdruck, welcher im Zähler bleibt, unter einem gemeinschaftlichen Nenner, so ergiebt sich, indem die Grösse $\mathfrak{G}hy + 2\pi x\sqrt{x^2+y^2}$ sich aufhebt:

$$\text{tang } \psi = \frac{(\mathfrak{G}hy + 2\pi x\sqrt{x^2+y^2})^2 + (\mathfrak{G}hx - 2\pi y\sqrt{x^2+y^2})^2}{\sqrt{(\mathfrak{G}hy + 2\pi x\sqrt{x^2+y^2})^2 + (\mathfrak{G}hx - 2\pi y\sqrt{x^2+y^2})^2}\cdot 2\pi\mathfrak{G}(x^2+y^2)}$$

Dividirt man durch die Wurzel-Grösse und durch $\mathfrak{G}$, so erhält man:

$$\text{tang } \psi = \frac{\sqrt{\left(hy + \frac{2\pi x\sqrt{x^2+y^2}}{\mathfrak{G}}\right)^2 + \left(hx - \frac{2\pi y\sqrt{x^2+y^2}}{\mathfrak{G}}\right)^2}}{2\pi(x^2+y^2)}$$

Oder wenn man beide Glieder im Zähler quadrirt:

$$= \frac{\sqrt{h^2y^2 + \left(\frac{2\pi x\sqrt{x^2+y^2}}{\mathfrak{G}}\right)^2 + h^2x^2 + \left(\frac{2\pi y\sqrt{x^2+y^2}}{\mathfrak{G}}\right)^2}}{2\pi(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2(x^2+y^2) + \frac{4\pi^2x^2(x^2+y^2) + 4\pi^2y^2(x^2+y^2)}{\mathfrak{G}^2}}}{2\pi(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h^2 + \frac{4\pi^2}{\mathfrak{G}^2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10.)$$

Bei der gewöhnlichen Schraubenfläche fällt die Linie des stärksten Falls mit der Schraubenlinie zusammen, weil die Tangente an irgend einem Punkte der Schraubenlinie und die Erzeugungslinie in derselben tangerenden Ebene liegen, und senkrecht zu einander stehen; diese Tangente wird daher die Richtung des stärksten Falls in der Ebene angeben. Wird man den Winkel, welchen das Element der Curve in diesem Falle mit dem Horizont macht, $\psi'$ nennen, so ist

$$\text{tang } \psi' = \frac{h}{2a\pi}$$

worin a seine frühere Bedeutung hat:

$$\text{oder: } \text{tang } \psi' = \frac{h}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{insofern} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11.)$$

$$a = \sqrt{x^2+y^2} \text{ ist.}$$

In dem gegenwärtigen allgemeineren Fall ist nach (10.):

$$\text{tang } \psi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h^2 + \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}^2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}}$$

wenn $\mathfrak{S} = \infty$ ist, dann geht der Winkel $\psi$ in $\psi'$ über und die Gleichungen (10.) und (11.) vollkommen übereinstimmen.

Nachdem die Tangente des Winkels gefunden ist, welchen das Element der Linie des stärksten Falls mit dem Horizont macht, hat es keine Schwierigkeit mehr, die Bedingungen des Gleichgewichts für die Fläche selbst zu bestimmen. Stellt MB die Richtung dieses Elements vor, B den Punkt, in welchem dieselbe die Ebene der (x, y) trifft, MP die Coordinate z für den Punkt M, so ist klar, dass Winkel PBM dem früher mit $\psi$ bezeichneten Winkel gleich ist.

Die Frage reducirt sich zunächst auf die Betrachtung einer schiefen Fbene, deren Neigung $\psi$ gegen den Horizont gegeben ist. Setzen wir die Wirkung der Schwere eines in M befindlichen Körpers = 1, so wird ein Theil dieser Wirkung durch den Widerstand der Fläche aufgehoben; der übrige äussert sich in der Richtung MB, welcher, wenn wir ihn durch f vorstellen, bestimmt ist durch die Gleichung

$$f = 1 \times \sin \text{PBM} = \sin \psi = \frac{\text{tang } \psi}{\sqrt{1 + \text{tang } \psi^2}}$$

oder wenn wir für tang $\psi$ den bereits gefundenen Werth substituren:

$$f = \sqrt{\frac{h^2 + \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}^2}(x^2 + y^2)}{\frac{4\pi^2 (x^2 + y^2)}{4\pi^2 (x^2 + y^2) + h^2 + \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}^2}(x^2 + y^2)}{4\pi^2 (x^2 + y^2)}}}$$

$$f = \sqrt{\frac{h^2 + \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}^2}(x^2 + y^2)}{4\pi^2 (x^2 + y^2) + h^2 + \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}^2}(x^2 + y^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (12.)$$

Wenn wir aber fragen nach den Bedingungen des Gleichgewichts bei einer Schraube, deren Gang von einem Theil der eben untersuchten Fläche gebildet wird, müssen andere Umstände in Betracht gezogen werden. Wäre nämlich irgend ein Partikel der Schraubenmutter frei, so dass es sich bewegen konnte, so würde dieses unzweifelhaft in der Linie des stärksten Falls sich gegen den Horizont herabbewegen. Aber dieser Umstand tritt hier nicht ein. Die Theilchen der Schraubenmutter sind an einander gebunden, und jedes ist gezwungen, eine Schraubenlinie zu beschreiben, sobald die Schraube gedreht wird. Alle diejenigen Punkte, die in einer geraden Erzeugungslinie, und zwar zwischen dem Punkte, wo diese Erzeugungslinie den cylinderischen Kern der Schraube trifft, und dem äussersten Rande des Schraubengangs gelegen sind, würden bei der Umdrehung der Schraube Curven beschreiben, deren Tangente parallel und gleich geneigt gegen den Horizont sind, und die Bedingungen des Gleichgewichts für eine von ihnen werden für alle übrigen gelten. Wenn daher die Kraft, mit welcher ein Molekül der Schraubenmutter in M längs der Linie des stärksten

Falls herabzufallen strebt, in zwei andere zerlegt wird, nämlich die eine parallel dem Elemente der Schraubenlinie für den Punkt M, die andere senkrecht gegen diese, so wird die letztere Componente nach der Natur des Vorgangs keine Wirkung haben können, und unsere Untersuchung beschränkt sich daher blos noch auf die erstere.

Denken wir uns das Gewicht der ganzen Schraube einschliesslich des etwa oben oder unten angebrachten Drucks, oder die Belastung der Schraube, auf sämmtliche Moleküle des Schraubenganges vertheilt. Denken wir unter M eines dieser Moleküle und setzen den vertikalen Druck, unter welchem es steht, $= 1$, so wird f wie in Gleichung (12.) den Theil dieses Drucks, der in der Richtung des stärksten Falls wirkt, bezeichnen. Stellt MA in Fig. 3 die Tangente der Schraubenlinie für den Punkt M vor, oder mit anderen Worten, die Richtung des Elements dieser Curve für jenen Punkt vor, und nennen wir f' die Kraft, mit welcher der ebenerwähnte Druck in der Richtung MA wirkt, so ist

$$f' = f \cos AMB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13.)$$

Denkt man sich durch den Punkt M eine beliebige Anzahl von Curven auf der Fläche, so werden die durch M gehenden Tangenten an alle diese Curven in der Berührungsebene liegen, die zu diesem Punkte gehört. Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der (x, y) mögen die Gerade m n, und B der Punkt sein, in welchem die Tangente an die Linie des stärksten Falls die Ebene der (x, y) trifft. Da nun MB mit dem Horizont einen grösseren Winkel macht, als irgend eine andere gerade Linie, die durch M in der Berührungsebene gezogen werden kann, so muss der Winkel, den sie mit dem Perpendikel MP macht, der kleinste sein. Die Linie MB ist deshalb die kürzeste, die von M nach m n gezogen werden kann, woraus sich denn unmittelbar giebt, dass der Winkel n B M ein rechter ist. Es ist dies übrigens auch aus dem vorhin gedachten Satze bekannt, dass überhaupt die Linie des stärksten Falls senkrecht steht zu der in der tangirenden Ebene zu ziehenden Horizontal-Linie.

Setzen wir den Winkel $AMB = \varphi$, den die beiden Tangenten an der Schraubenlinie und an der Linie des stärksten Falls in M einschliessen, so haben wir:

$$\cos \varphi = \frac{BM}{AM}$$

Es ist aber $BM = MP. \sec PMB$ und $AM = MP. \sec PMA$; daher:

$$\cos \varphi = \frac{\sec. PMB}{\sec. PMA} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tang} PMB^2}{1 + \operatorname{tang} PMA^2}}$$

Da nun PMB der Complementwinkel von $\psi$ und PMA der von $\psi'$ ist, so haben wir:

$$\operatorname{tang} PMB^2 = \frac{1}{\operatorname{tang} \psi^2} = \frac{4\pi^2 (x^2 + y^2)}{h^2 + \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}^2} (x^2 + y^2)}$$

$$\operatorname{tang} PMA^2 = \frac{1}{\operatorname{tang} \psi'^2} + \frac{4\pi^2 (x^2 + y^2)}{h^2}$$

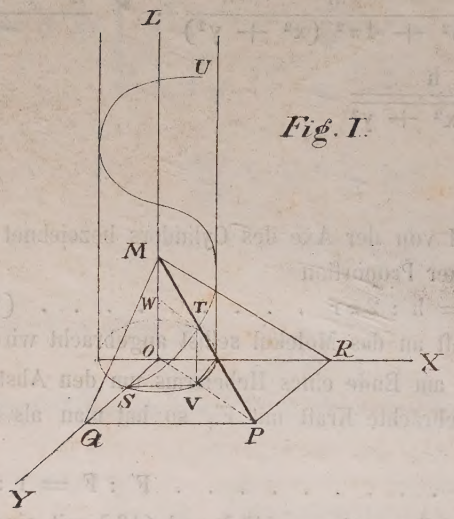


*Fig. I.*

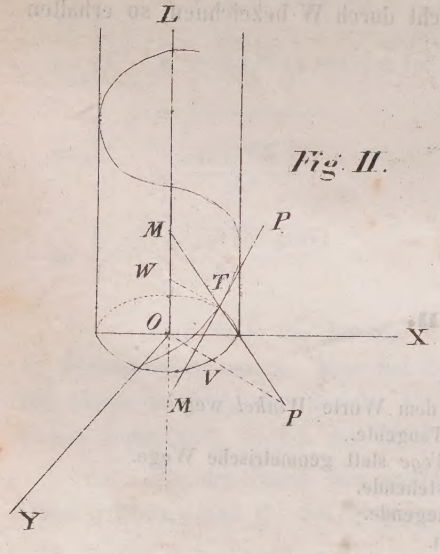


*Fig. II.*

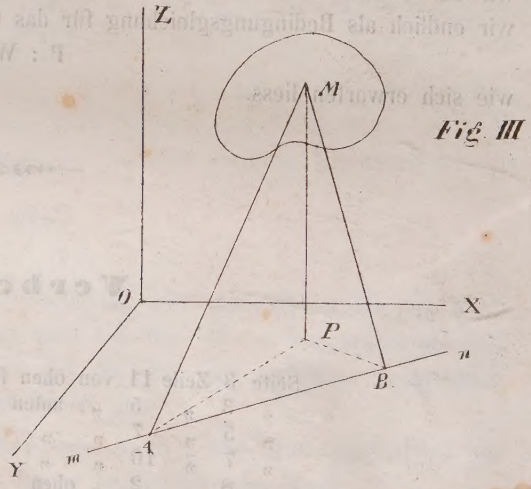


*Fig. III*